Twórcy:  
Karol Przewoźnik  
Łukasz Checiak  
Jakub Okrzesik  
Wojtek Łopata  
Mateusz Czech  
Filip Kamiński

1. Podaj przykªadowe twierdzenie poznane na wykªadzie, które jest warunkiem koniecznym oraz takie, które jest warunkiem wystarczaj¡cym (np. dla istnienia ekstremów lub istnienia rozwi¡za« ukªadu równa« liniowych).

Warunkiem koniecznym na przykład może być dla ekstremum lokalnego w funkcjach dwóch zmiennych istnienie miejsc zerowych pochodnych f’x i f’y, warunkiem wystarczającym będzie istnienie pochodnych drugiego rzędu f’xx f’xy f’yy i f’yx

1. Na czym polega utożsamienie zbioru liczb zespolonych z płaszczyzn¡e kartezjańsk¡ej Omówić charakterystykę punktu z ≡ (x, y).

Liczby zespolone można zapisać na płaszczyźnie karezjańskiej. Aby do zrobić używamy postaci kanonicznej z=a+bi, lub w tym przypadku z=x+yi, gdzie x to realna część oznaczana wartością osi x a y to część urojona oznaczana osią y

1. Podać trzy własności modułu liczby zespolonej i udowodnić je

|

|z1⋅z2|=|z1|⋅|z2|

0

Pierwiastek nie może być ujemny

1. Podać dwie własności argumentu liczby zespolonej i udowodnić je.

.  
arg (z) czyli kąt nie może być większy niż 360 czy też 2

.

1. Podać wzór de Moivre'a dla pierwiastka liczby zespolonej. Ile rozwiązań ma równanie z^n = w, gdzie w jest daną liczbą zespoloną? Podać charakteryzację geometryczną. Rozwiązać równanie z^n = w (w ∈ C, n ∈ N ∩ [0, 6])
2. Dla jakich macierzy możliwe jest ich potęgowanie? Wyznaczy¢ trzecią potęgę macierzy A

Potęgować można tylko macierze kwadratowe

1. Dokończ własność: (A · B)^T = . . . . . . Sprawdż poprawność na przykładzie macierzy A, B
2. Kiedy na pewno (bez wykonywania obliczeń) można stwierdzić, że macierz jest osobliwa? Uzasadnić, czy podane macierze są osobliwe: A, B, C.

Dwa wiersze lub dwie kolumny w macierzy są identyczne.  
Dwa wiersze lub dwie kolumny w macierzy są proporcjonalne.  
Wiersz lub kolumna macierzy składa się z zer.

1. Wiadomo, że dla pewnej macierzy A ∈ zachodzi det A = 1. Ile wynosi det(3A)?

Det (3A) = =9

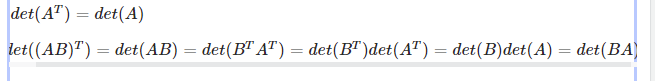
Wzór to det(xA)= *n to stopień macierzy*

1. Wykazać, że det(A · B) = det(B · A).

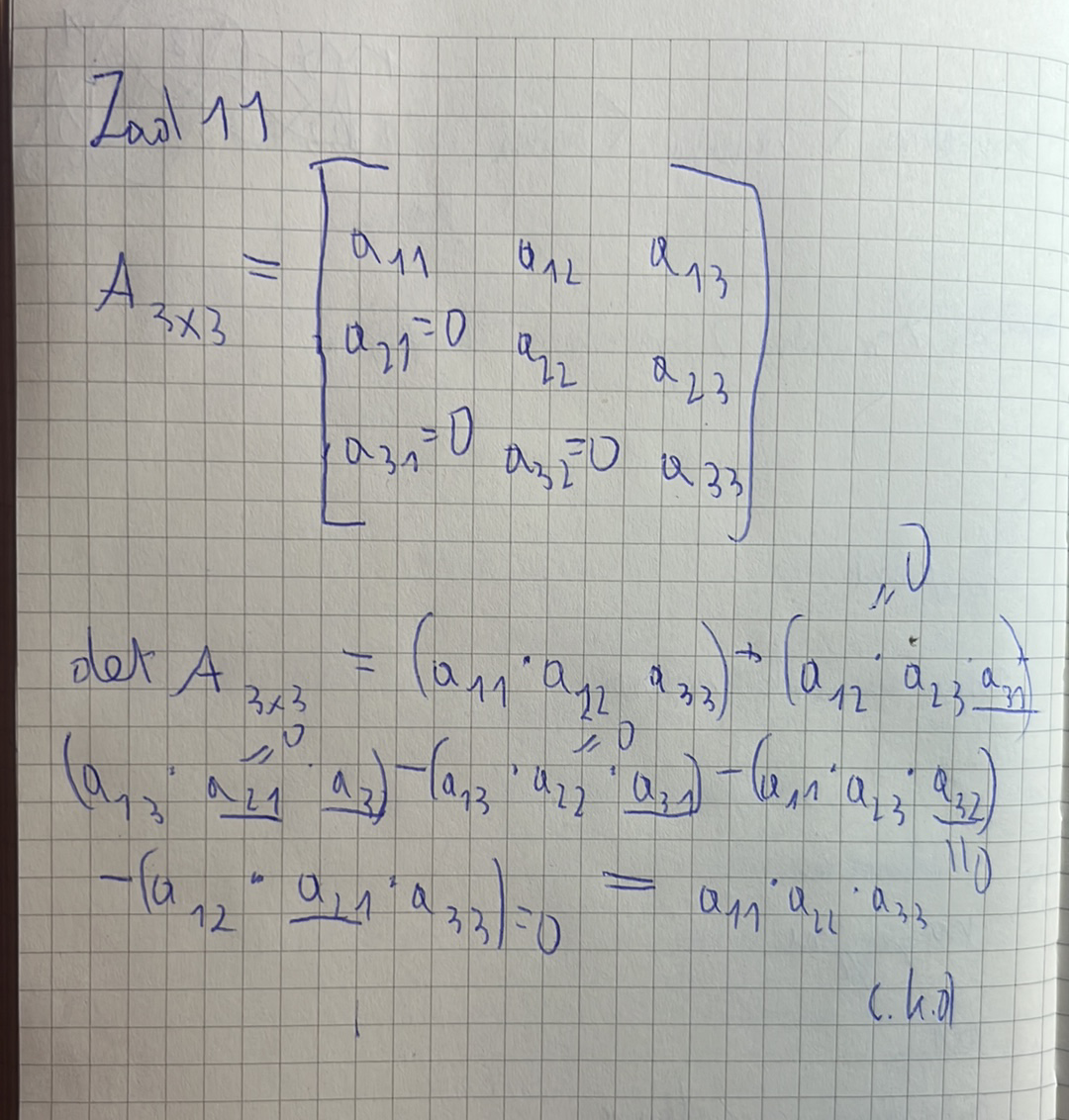
A= B=

Det(A\*B) == (wa+xc)(yb+zd)-(ya+zc)(wb+xd)=wayb+wazd+xcyb+xczd-wayb-yaxd-zcwb-zcxd=wazd(awdz)+xcyb(bycx)-zcwb(cwbz)-yaxd(dyax)

Det(B\*A) ==(aw+by)(cx+dz)-(cw+dy)(ax+bz)=awcx+awdz+bycx+bydz-awcx-cwbz-bydz-dyax=  
awdz+bycx-cwbz-dyax

awdz+bycx-cwbz-dyax= awdz+bycx-cwbz-dyax, więc Det A\*B = Det B\*A

1. Wykaza¢, »e dla dowolnej macierzy dolnie (lub górnie) trójk¡tnej wymiaru 3×3 wyznacznik jest równy a11 · a22 · a33.



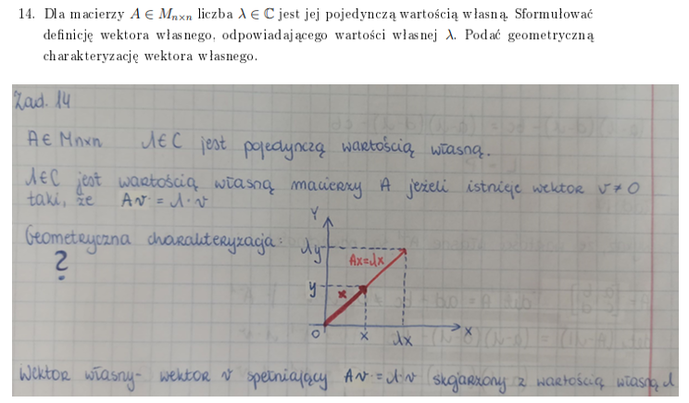
1. Ile mo»e wynie±¢ rz¡d macierzy wymiaru 2×4, w której a23 = 8? Wyznaczy¢ rz¡d macierzy A.

Rząd macierzy może wynieść 1 lub 2 (wartość a23 = 8 nie ma znaczenia)

1. Czy ka»dy ukªad, który ma jedno rozwi¡zanie, jest ukªadem cramerowskim?

Nie ponieważ jeśli układ ma jedno rozwiązanie a jego det wynosi 0 to nie jest cramerowski

1. Dla macierzy A ∈ Mn×n liczba λ ∈ C jest jej pojedyncz¡ warto±ci¡ wªasn¡. Sformuªowa¢ denicj¦ wektora wªasnego, odpowiadaj¡cego warto±ci wªasnej λ. Poda¢ geometryczn¡ charakteryzacj¦ wektora wªasnego.



1. Poda¢ twierdzenie Cayley'a-Hamiltona. Za jego pomoc¡ wyznaczy¢ macierz odwrotn¡ dla A

Jeżeli A jest macierzą nxn

A=

1. Wykaza¢, »e warto±ci wªasne macierzy A i jej transpozycji s¡ takie same.

Macierz

1. Wykazać, że wartości własne macierzy A−1 są odwrotnościami wartości własnych macierzy A.

Jeśli weźmiemy definicję kanoniczną wektorów własnych i wartości własnych macierzy M, i później uznamy że M jest odwracalna(istnieje M^-1), żeby M\*M^-1 = I

Mv=λv

Mnożymy obie strony przez M^-1

M^-1Mv=λM^-1v, więc v= λM^-1v,

Możemy to zapisać jako (1/λ)v=M^-1v

Więc v jest także wektorem własnym M^-1 z wartością własną 1/λ

1. Poda¢ definicję macierzy ortogonalnej. Sprawdzi¢ czy podana macierz A ma kolumny ortogonalne. Je±li tak, to znormalizowa¢ je tak, aby otrzyma¢ macierz ortogonalną.
2. Zdiagonalizować macierz A =

1)

Met Gaussa

2)

Met Gaussa

1. Podać definicję macierzy nieredukowalnej. Wskazać po jednym przykładzie macierzy nieredukowalnej i macierzy redukowalnej.

Macierz nieredukowalna to macierz której nie da się zredukować

1. Podać definicję macierzy Markowa. Scharakteryzować jej warto±ci wªasne

Macierz A=[aij] € Mn,n nazywamy macierzą Markowa, jeżeli aij >= 0 dla wszystkich i,j € {1,..,inf} oraz dla każdego j=1,...,n

Macierz A jest nieujemna oraz suma elementów w każdej kolumnie jest równa 1

Przykład:

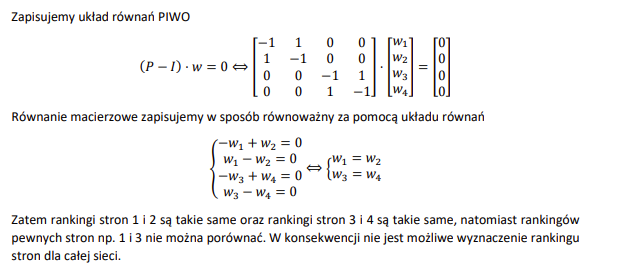
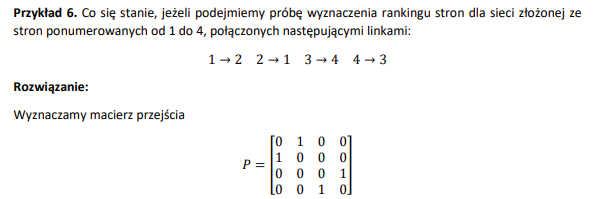
1. Podać definicje stanu granicznego i stanu równowagi w równaniach różnicowych. Podać zwi¡zek pomi¦dzy tymi poj¦ciami, je»eli macierz równania ró»nicowego jest macierz¡ Markowa.

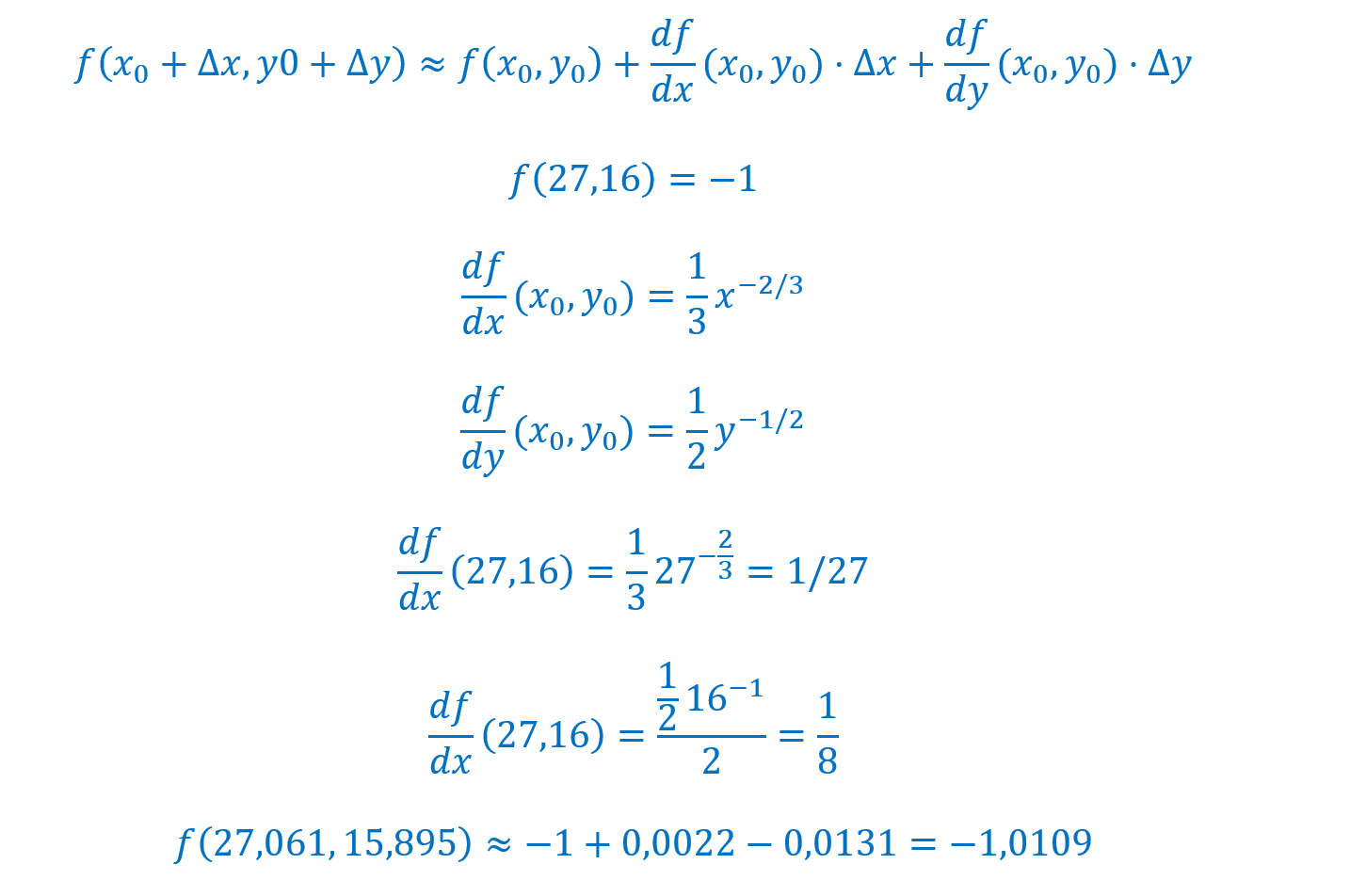
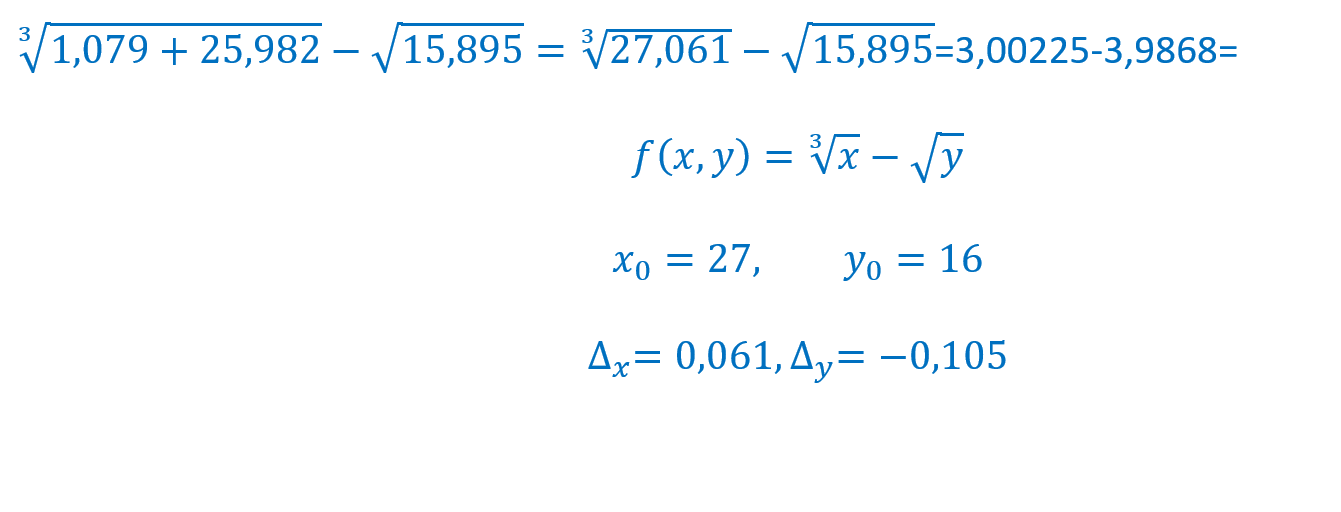
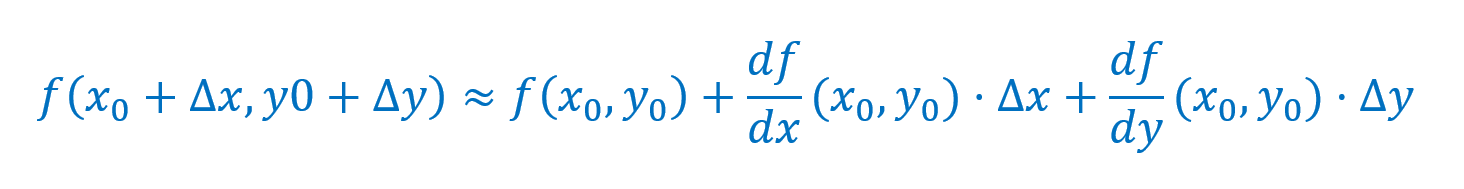
Stan graniczny równania różnicowego nazywamy stan

Stan równowagi równania różnicowego nazywamy stan taki że A=

Jeżeli macierz przejścia jest macierzą Markowa, to stan równowagi jest stanem granicznym

1. Uzasadnij, »e ukªad równa« (P − I)w = 0 w metodzie Google PageRank ma niesko«- czenie wiele rozwi¡za«. Dlaczego wektor wag w mo»na wybra¢ tak, aby wszystkie jego wspóªrz¦dne byªy dodatnie?

  
24. Jaki rodzaj zmian warto±ci funkcji opisuje kra«cowo±¢ cz¡stkowa, a jaki elastyczno±¢ cz¡stkowa? Dla funkcji z = f(x, y) wyznaczy¢ kra«cowo±ci cz¡stkowe i elastyczno±ci cz¡stkowe w punkcie (x0, y0) oraz poda¢ interpretacje otrzymanych liczb.

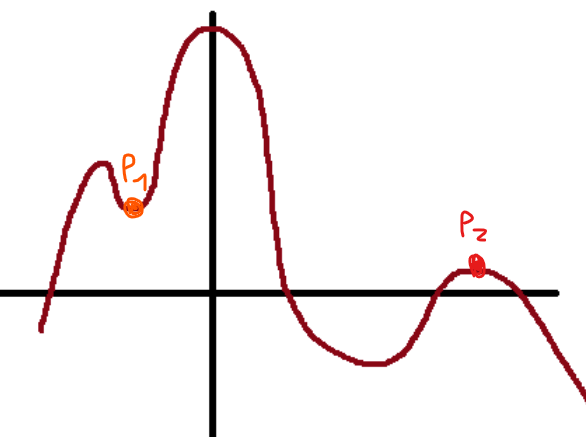
Krancowosc czastkowa opisuje zmiane wartosci funkcji o f’xi liczbe jednostek, a elasytcznosc czastkowa opisuje zmiane wartosci funkcji o zmiane wartosci funkcji o ExiF procent. Krancowosci czastkowe: f’x(x,y) ◊ f’x(x0,y0) = wynik, tak samo z y Je»eli argument xi funkcji f wzro±nie o jedn¡ jednostk¦ z poziomu x 0 i , przy nie zmienionych pozostaªych argumentach na poziomie (x 0 1 , . . . , x0 i−1 , x0 i+1, . . . , x0 n ), to warto±¢ funkcji zmieni si¦ o okoªo f 0 xi (x 0 1 , . . . , x0 n ) jednostek. Elastycznosci czastkowe: (x/f(x0,y0)) \* f’x(x0,y0) = wynik Je»eli argument xi funkcji f wzro±nie o 1 procent z poziomu x 0 i , przy nie zmienionych pozostaªych argumentach na poziomie (x 0 1 , . . . , x0 i−1 , x0 i+1, . . . , x0 n ), to warto±¢ funkcji zmieni si¦ o okoªo Exi f(x 0 1 , . . . , x0 n ) procent  
25. Za pomoc¡ ró»niczki znale¹¢ przybli»on¡ warto±¢ wyra»enia typu √3 1, 079 + 25, 982 − √ 15, 895.  


26. Poda¢ warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych? Wyznacz punkty krytyczne funkcji z = f(x, y).

27. Czy w punkcie stacjonarnym, dla którego znaki minorów wiod¡cych hesjanu ukªadaj¡ si¦ w ci¡g (+, −, +), istnieje maksimum rozwa»anej funkcji? Sprawdzi¢, czy w punkcie (x0, y0) funkcja z = f(x, y) osi¡ga ekstremum. Jaki jest jego charakter?

Nie bo jest miejsce siodłowe, naura

28. Czy warto±¢ funkcji w minimum lokalnym mo»e by¢ wi¦ksza ni» jej warto±¢ w maksimum lokalnym? Je±li tak, poda¢ przykªad (mo»e byc graczny). Je±li nie, uzasadnij dlaczego.



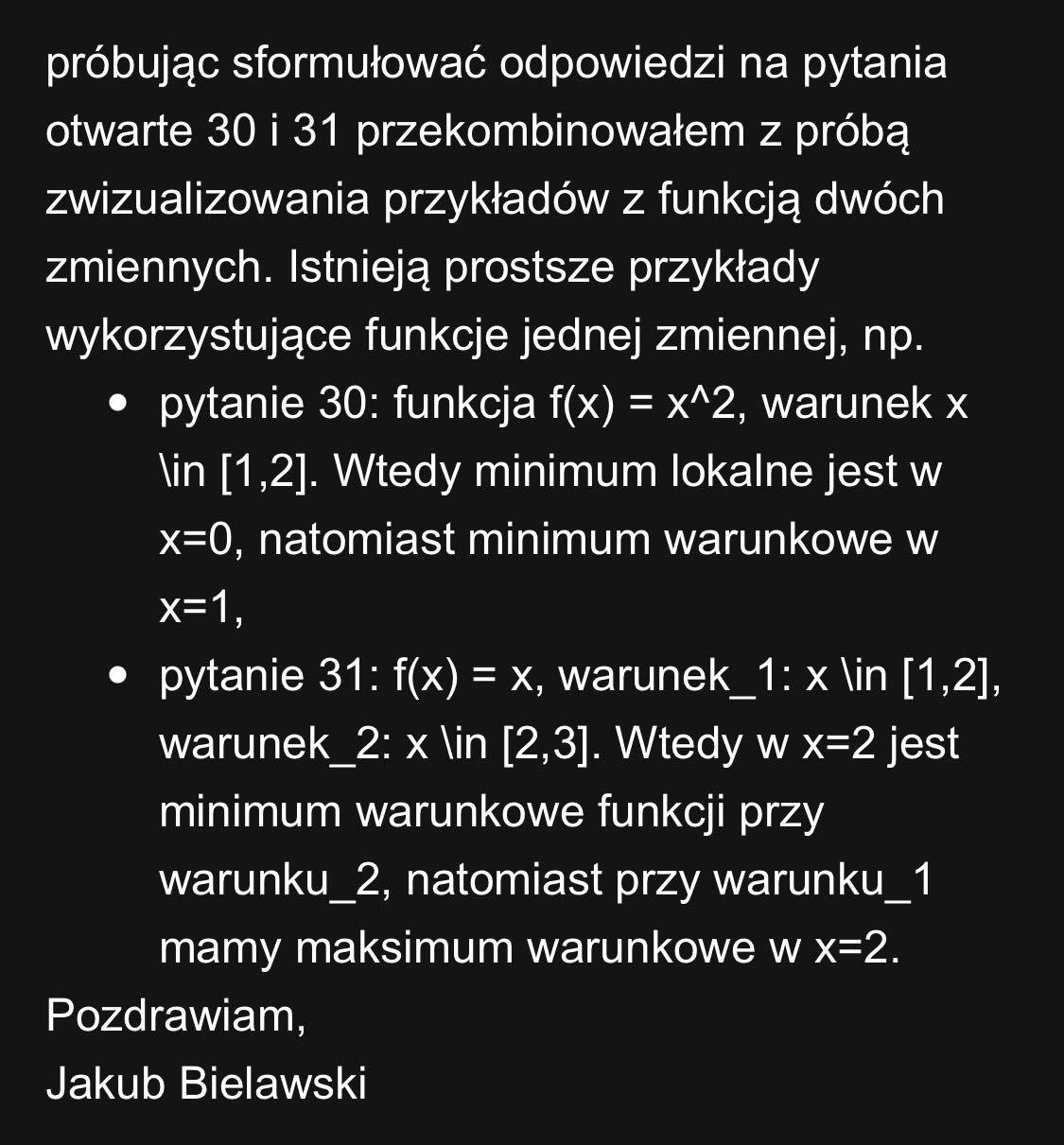
Tak

29. Czy wynikiem procedury metody najmniejszych kwadratów mo»e by¢ wielomian 4 stopnia? Je±li tak, od ilu zmiennych b¦dzie zale»aªa funkcja pomocnicza S? Dla zbioru danych (x1, y1),(x2, y2),(x3, y3),(x4, y4) za pomoc¡ MNK wyznaczy¢ krzyw¡ trendu postaci y = f(x)

Nie, w metodzie najmniejszych kwadratów, wielomian może być najwyżej stopnia 2

30. Funkcja f osi¡ga minimum warunkowe w punkcie P1 i minimum lokalne w punkcie P2. Czy P1 = P2? Je±li tak, uzasadni¢. Je±li nie, poda¢ kontrprzykªad (mo»e by¢ graczny)

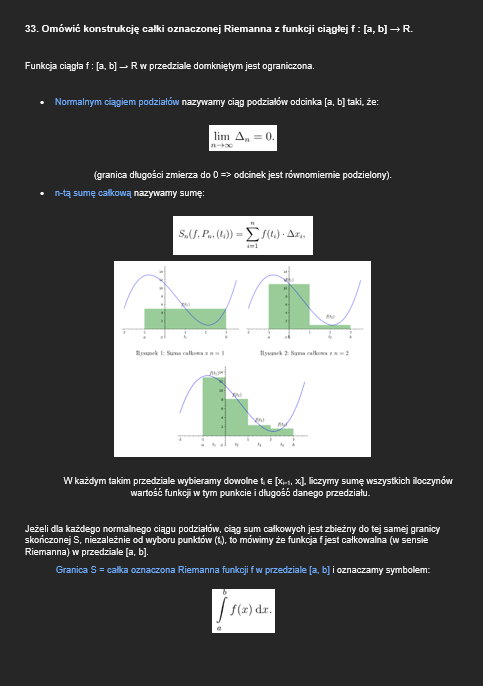
31. Czy jest mo»liwa nast¦puj¡ca sytuacja: funkcja f osi¡ga w punkcie P minimum warunkowe przy warunku g1 = 0 oraz maksimum warunkowe przy warunku g2 = 0? Je±li tak, poda¢ przykªad. Je±li nie, uzasadnij dlaczego.



32. Czym si¦ ró»ni funkcja pierwotna od caªki nieoznaczonej? Wyznacz funkcj¦ pierwotn¡ i caªk¦ nieoznaczon¡ dla funkcji f(x) = x ln(x 2 + 1).

Funkcja pierwotna to funkcja F taka ze dla kazdego punktu x in a,b zachodzi F’=f. Całka nieoznaczona to zbior wszystkim pierwotnych funkcji f

33. Omówi¢ konstrukcj¦ caªki oznaczonej Riemanna z funkcji ci¡gªej f : [a, b] → R



34. Poda¢ denicj¦ warto±ci ±redniej funkcji f na przedziale [a, b]. Jaka jest jej geometryczna interpretacja? Wyznaczy¢ ±redni¡ efektywno±¢ uczenia si¦ studenta IS mi¦dzy 34 i 35 oraz mi¦dzy 4 i 5 godzin¡ przed egzaminem, gdy efektywno±¢ uczenia si¦ w czasie jest dana jako w(t) =

35. Poda¢ ekonomiczne zastosowania caªki oznaczonej (co najmniej dwa przykªady). Zastosowa¢ je dla funkcji y = f(x) dla x ∈ [a, b].

1.Krańcowość  
Zmiana wielkości całkowitej

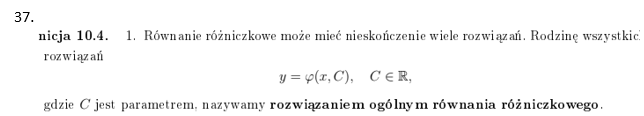
2.Średnia  
Wartość średnia

36. Poda¢ twierdzenie opisuj¡ce metod¦ obliczania pól powierzchni gur pªaskich. Zilustrowa¢ to twierdzenie gracznie. Uzasadni¢, »e pole powierzchni gury pªaskiej nie mo»e by¢ ujemne.

Pole A wynosi

Pole nie może być ujemne gdy, zakładamy że od linii ograniczającej góre odejmujemy tą na dole i najmniejsze pole wynosi 0 do f(x)-g(x)

37. Dla równa« ró»niczkowych zwyczajnych, czym si¦ ró»ni rozwi¡zanie ogólne od rozwi¡- zania szczególnego? Poda¢ dwa sposoby na otrzymanie rozwi¡zania szczególnego z rozwi¡zania ogólnego. Wyznaczy¢ rozwi¡zanie ogólne równania (o zmiennych rozdzielonych) y 0 = f(x, y) oraz poda¢ rozwi¡zanie szczególne przy warunku pocz¡tkowym y(0) = y0 (funkcja f oraz punkt y0 b¦d¡ podane).



38. Poda¢ schemat rozwi¡zania równania ró»niczkowego liniowego niejednorodnego. Wyznaczy¢ rozwi¡zanie ogólne równania y 0 = f(x, y) (funkcja f b¦dzie podana) 